Title	O(1, q+1) 上の wave formについて(Automorphic representation の研究)
Author(s)	高瀬, 幸一
Citation	数理解析研究所講究録 (1986), 583: 59-72
Issue Date	1986-02
URL	http://hdl.handle.net/2433/99341
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
583巻 1986年 59-72

$O(1, g+1)$ 上の wave form について.

東工大・理　高瀬幸一 (Koichi Takase)

本講では、符号数 $(1, g+1)$ の2次形式の直交群上の wave form を定義して、それに附随する2種類の Dirichlet series の解析接続と関数等式について考察する。Mellin 変換と Rankin-Selberg method によ り2種類の Dirichlet series が生ずるが、後者は前者の部分和に相当する。最後の§では、$g=2$ の場合に、虚2次体上の $GL(2)$ 上の automorphic form との関連で考察する。

§1. 記号.

1. 符号数 $(1, g+1)$ $(g>0)$ の対称行列 $S \in Mat(g+2, \mathbb{Q})$ を取り、$S = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & S_0 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$ ($S_0 \in Mat(g, \mathbb{Q})$ s.t. ${}^tS_0 = S_0 > 0$) であるとする。$\tilde{G}$ は $\mathbb{Q}$ 上定義された reductive 代数群で、$\mathbb{Q}$-rational points は、

$$\tilde{G}_{\mathbb{Q}} = \{ g \in GL(g+2, \mathbb{Q}) \mid {}^tg \cdot S \cdot g = \nu(g) \cdot S \quad \text{for } \nu(g) \in \mathbb{Q}^\times \}$$

とする。$\tilde{G}$ の元 g は、$g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & i & j \end{pmatrix} \begin{matrix} \}1 \\ \}g \\ \}1 \end{matrix}$ とブロック分けして表わす。
$\tilde{G}$ の semi-simple part は、$G = \{ g \in \tilde{G} \mid \nu(g) = 1 \}$ である。

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix} \in G \right\}$$

は，$\mathbb{Q}$上定義された G の minimal parabolic subgroup である。P は，分解 $P = N \cdot A \cdot M$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in P \right\}, \quad A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix} \in P \right\}, \quad M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in P \right\}$$

をもつ。$\mathbb{Q}$上の同型 $n : \mathbb{Q}^{\ell} \xrightarrow{\sim} N_{\mathbb{Q}}$ が

$$n(x) = \begin{pmatrix} 1 & -{}^t x \cdot S_0 & -\frac{1}{2} \cdot {}^t x \cdot S_0 \cdot x \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

により定義される。$\tilde{G}_0$ は，$\mathbb{Q}$上定義された，連結 reductive 代数群で，$\mathbb{Q}$-rational points は，

$$\tilde{G}_{0,\mathbb{Q}} = \left\{ e \in GL(\ell, \mathbb{Q}) \;\middle|\; \begin{array}{l} {}^t e \cdot S_0 \cdot e = \nu(e) \cdot S_0 \quad \text{for } \nu(e) \in \mathbb{Q}^{\times} \\ \det e = \nu(e)^{\ell/2} \quad \text{if } \ell \text{ is even} \end{array} \right\}$$

とする。代数群 $\tilde{G}, G, P$, etc. の $\mathbb{Q}$上の adelization を $\tilde{G}_A, G_A, P_A$, etc. とする。

2. $L_0 \subset \mathbb{Q}^{\ell}$ は，S_0 に関する maximal integral $\mathbb{Z}$-lattice (i.e. $\frac{1}{2} \cdot {}^t x \cdot S_0 \cdot x \in \mathbb{Z}$ for ${}^\forall x \in L_0$ となる極大な $\mathbb{Z}$-lattice) とすると，

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{\ell+2} \;\middle|\; x, z \in \mathbb{Z},\ y \in L_0 \right\}$$

は，S に関する maximal integral $\mathbb{Z}$-lattice である。$\mathbb{Q}$ の finite place p に対して，

$$\tilde{K}_p = \{ g \in \tilde{G}_p \mid g(L_p) = L_p \} \qquad (L_p = L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)$$

とおくと，$\tilde{K}_f = \prod_{p<\infty} \tilde{K}_p$ は，$\tilde{G}_A$ の finite part $\tilde{G}_f$ の open compact subgroup となる。$\tilde{G}_\infty$ の maximal compact subgroup を

$$\tilde{K}_\infty = \left\{ g \in \tilde{G}_\infty \;\middle|\; {}^t g \cdot \begin{pmatrix} & & 1 \\ & S_0 & \\ 1 & & \end{pmatrix} \cdot g = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & S_0 & \\ 1 & & \end{pmatrix} \right\}$$

として，$\tilde{K} = \tilde{K}_\infty \times \tilde{K}_f$ は $\tilde{G}_A$ の compact subgroup である。$K = \tilde{K} \cap G_A$ とおく。

$\mathbb{Q}$ の finite place p に対して，

$$\tilde{U}_p = \{ e \in \tilde{G}_{0,p} \mid e(L_{0,p}) = L_{0,p} \} \qquad (L_{0,p} = L_0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)$$

とおくと，$\tilde{U}_f = \prod_{p<\infty} \tilde{U}_p$ は $\tilde{G}_{0,A}$ の finite part $\tilde{G}_{0,f}$ の open compact subgroup となる。

§2. maass forms.

3. 実 Lie 群 G_∞ の Lie 環を $\mathfrak{g}$ として，$D = 2\cdot(q-1)\times$ Casimir element for $\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ とおくと，D は G_∞ 上の両側不変微分作用素である。D の作用は次の様に表わされる；G_∞ 上の右 $\tilde{K}_\infty$-不変 C^∞-関数 φ に対して，

$$F(x, y) = \varphi\left(n(x)\cdot \begin{pmatrix} y & & \\ & 1 & \\ & & y^{-1} \end{pmatrix}\right) \quad \text{for } x \in \mathbb{R}^q,\ 0 < y \in \mathbb{R}$$

とおくと，

$$D\cdot F = \left\{ y^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} - (q-1)\cdot y \cdot \frac{\partial}{\partial y} + 2y^2 \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_q}\right)\cdot S_0^{-1} \cdot {}^t\!\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_q}\right) \right\} F$$

となる（$g = n(x)\cdot \begin{pmatrix} y & & \\ & 1 & \\ & & y^{-1} \end{pmatrix} \cdot k \in G_\infty$ ($k \in \tilde{K}_\infty$) は G_∞ の岩沢分解を与える）。

$\mathbb{R}^\times$ の連続 unitary character w_∞，$\rho \in \mathbb{C}$，及び $u \in \mathbb{R}^q$ に対して，実解析

的関数 $W:\tilde{G}_\infty \to \mathbb{C}$ で，条件

1) $W(z\cdot n(x)\cdot g\cdot k) = w_\infty(z)\cdot \Lambda_\infty({}^t u\cdot S_0\cdot x)\cdot W(g)$ for ${}^\forall z\in\mathbb{R}^\times$, ${}^\forall x\in\mathbb{R}^g$, ${}^\forall k\in\tilde{K}_\infty$

   （但し，$\Lambda_\infty(r) = \exp(-2\pi\sqrt{-1}\cdot r)$ for $r\in\mathbb{R}$ ）

2) $D\cdot W = \{\rho^2 - (\frac{g}{2})^2\}\cdot W$

3) $\left|W\begin{pmatrix} y & & \\ & 1 & \\ & & y^{-1}\end{pmatrix}\right| \leq C\cdot \mathrm{Max}\{y^r, y^{-r}\}$ for ${}^\forall y\in\mathbb{R}, y>0$ （但し，$C>0$, $r\geq 0$ は y によらない定数）.

を満す W の成す $\mathbb{C}$-vector space を $W(w_\infty, \rho, u)$ とすると，次の lemma が成り立つ．

<u>Lemma 1.</u> 1) $u\neq 0$ のとき，$\dim_{\mathbb{C}} W(w_\infty, \rho, u) = 1$ で

$$W_{\rho,u}\begin{pmatrix} y & & \\ & 1 & \\ & & y^{-1}\end{pmatrix} = K_\rho\left(4\pi\cdot(\tfrac{1}{2}\cdot{}^t u\cdot S_0\cdot u)^{\frac{1}{2}}\cdot|y|\right)\cdot\left|4\pi(\tfrac{1}{2}\cdot{}^t u\cdot S_0\cdot u)^{\frac{1}{2}}\cdot y\right|^{\frac{g}{2}} \quad (y\in\mathbb{R}^\times)$$

なる $\mathbb{C}$-base $W_{\rho,u}\in W(w_\infty, \rho, u)$ をもつ．ここで

$$K_\rho(x) = \int_0^\infty \cosh(\rho t)\cdot\exp(-x\cdot\cosh t)\,dt \qquad (x>0)$$

は modified Bessel 関数である．

2) $u=0$ のときは，$\dim_{\mathbb{C}} W(w_\infty, \rho, u) = 2$ で

$$W_\rho^{(1)}\begin{pmatrix} y & & \\ & 1 & \\ & & y^{-1}\end{pmatrix} = |y|^{\frac{g}{2}+\rho}, \quad W_\rho^{(2)}\begin{pmatrix} y & & \\ & 1 & \\ & & y^{-1}\end{pmatrix} = \begin{cases} |y|^{\frac{g}{2}-\rho} & : \text{if } \rho\neq 0 \\ |y|^{\frac{g}{2}}\cdot\log|y| & : \text{if } \rho = 0\end{cases}$$

なる $\mathbb{C}$-base $\{W_\rho^{(1)}, W_\rho^{(2)}\}\subset W(w_\infty, \rho, u)$ をもつ．

4. idele class group $\mathbb{Q}_A^\times/\mathbb{Q}^\times$ の連続 unitary character ω, 及び $\rho \in \mathbb{C}$ に対して, Φ が $\tilde{G}_A$ 上の wave form of type (ω, ρ) であるとは,

1) Φ は $\tilde{G}_A$ 上の複素数値連続関数であり, $\tilde{G}_A$ の infinite part に関しては, 実解析的である,

2) $\Phi(x\cdot\gamma\cdot g\cdot k) = \omega(x)\cdot\Phi(g)$ for ${}^\forall x \in \mathbb{Q}_A^\times$, ${}^\forall \gamma \in \tilde{G}_\mathbb{Q}$, ${}^\forall k \in \tilde{K}$,

3) $D\cdot\Phi = \{\rho^2 - (\frac{g}{2})^2\}\cdot\Phi$,

4) slowly increasing,

を満すことである。$\tilde{G}_A$ 上の wave form of type (ω, ρ) の成す $\mathbb{C}$-vector space を $A(\omega, \rho)$ とする. $\dim_\mathbb{C} A(\omega, \rho) < \infty$ である。

${}^\forall\Phi \in A(\omega, \rho)$ は Fourier 展開

$$\Phi(n(x)\cdot g) = \sum_{u \in \mathbb{Q}^g} \Phi_u(g)\cdot\Lambda({}^t u\cdot S_0\cdot x)$$

をもつ。ここで, Λ は $\mathbb{Q}_A/\mathbb{Q}$ の連続 unitary character で $\Lambda_\infty(x) = \exp(-2\pi\sqrt{-1}\,x)$ なるものとする。$\tilde{G}_A$ の infinite part 上の関数としては Φ_u は $W(\omega_\infty, \rho, u)$ の元であって (ω_∞ は ω の infinite part), Lemma 1 より,

$$\Phi_u(g) = C_u(\Phi, g_f)\cdot W_{\rho,u}(g_\infty) \qquad (u \neq 0)$$

とおく。又, $e \in \tilde{G}_{0,A}$, $y \in \mathbb{Q}_A^\times$ に対して,

$$\Phi_0\begin{pmatrix} \nu(e)\cdot y & & \\ & e & \\ & & y^{-1} \end{pmatrix} = a(\Phi, e)\cdot W_\rho^{(1)}\begin{pmatrix} |y|_A & & \\ & 1 & \\ & & |y|_A^{-1} \end{pmatrix} + b(\Phi, e)\cdot W_\rho^{(2)}\begin{pmatrix} |y|_A & & \\ & 1 & \\ & & |y|_A^{-1} \end{pmatrix}$$

とおく ($|y|_A$ は, idele y の絶対値)。

$S(w,\rho)=\{\Phi\in A(w,\rho)\mid \Phi_0(g)=0$ for $^\forall g\in\tilde{G}_A\}$ は, cuspidal wave forms の成す $\mathbb{C}$-vector space である.

$A(w,\rho)\neq 0$ となるのは, $w=1\cdot|_A^\sigma$ $(\sigma\in\sqrt{-1}\cdot\mathbb{R})$ の場合に限ることに注意する。

wave form の Fourier 係数に関して, 次の lemma が成り立つ.

<u>Lemma 2</u>　wave form $\Phi\in A(w,\rho)$ と, $e\in\tilde{G}_{0,f}$, $a\in\mathbb{Q}_f^\times$, $0\neq u\in\mathbb{Q}^\delta$ に対して,

$$C_u\left(\Phi,\begin{pmatrix}\nu(e)\cdot a&&\\&e&\\&&a^{-1}\end{pmatrix}\right)\neq 0$$

となるのは, $u\in\mathbb{Q}^\delta\cap(a\cdot\nu(e))^{-1}\cdot e\cdot\prod_{p<\infty}\hat{L}_{0,p}$ の場合に限る。ここで

$$\hat{L}_{0,p}=\{y\in\mathbb{Q}_p{}^\delta\mid {}^ty\cdot S_0\cdot x\in\mathbb{Z}_p \text{ for } {}^\forall x\in L_{0,p}\}\quad(p<\infty)$$

は, S_0 に関する $L_{0,p}$ の dual lattice である.

§3. Mellin 変換

5.　$w=1\cdot|_A^\sigma$ $(\sigma\in\sqrt{-1}\cdot\mathbb{R})$, と $\rho\in\mathbb{C}$ を取る。wave form $\Phi\in A(w,\rho)$ と連続関数 $\varphi:\tilde{G}_{0,\mathbb{Q}}\backslash\tilde{G}_{0,f}/\tilde{U}_f\to\mathbb{C}$ に対して,

$$\begin{aligned}&Z(s;\Phi,\varphi)\\&=2^{\frac{\delta}{2}-1}\cdot(2\pi)^{-s}\cdot\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\left(s+\tfrac{\delta}{2}+\rho\right)\right)\cdot\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\left(s+\tfrac{\delta}{2}-\rho\right)\right)\times\\&\quad\times\sum_{0\neq u\in\mathbb{Q}^\delta}\sum_{e}C_u\left(\Phi,\begin{pmatrix}\nu(e)&&\\&e&\\&&1\end{pmatrix}\right)\cdot\varphi(e)\cdot|\nu(e)|_f^{\frac{1}{2}(s-\sigma)}\cdot\left(\tfrac{1}{2}{}^tu\cdot S_0\cdot u\right)^{-\frac{s}{2}}\end{aligned}$$

とおく。ここで，$\sum_{e}$ は $\tilde{G}_{0,\mathbb{Q}}\backslash\tilde{G}_{0,f}/\tilde{U}_f$ の完全代表系上の和（$\tilde{G}_{0,\mathbb{Q}}\backslash\tilde{G}_{0,f}/\tilde{U}_f$ は有限集合），又 $|\cdot|_f$ は $|\cdot|_A$ の finite part である。Lemma 2 より，$Z(s;\Phi,\varphi)$ は Dirichlet series となり，Φ の増大条件より，$Z(s;\Phi,\varphi)$ は，$\mathrm{Re}\,s \gg 0$ で絶対収束する。一方 $\check{\Phi}(g)=\Phi(g)\cdot\omega(\nu(g))^{-1}$ とおくと，$\check{\Phi}\in A(\omega^{-1},\rho)$ である。このとき，次の定理が成り立つ。

Theorem 1　Dirichlet series $Z(s;\Phi,\varphi)$ は全 s-平面に有理的に解析接続され，関数等式 $Z(s;\Phi,\varphi)=Z(-s;\check{\Phi},\check{\varphi})$ を満す。ここで $\check{\varphi}(e)=$ $=\varphi(\nu(e)^{-1}\cdot e)$ とおく。更に，

$$Z(s;\Phi,\varphi)+a(\Phi,\varphi)\cdot\left(s+\frac{g}{2}+\rho\right)^{-1}+b(\Phi,\varphi)\times\begin{cases}\left(s+\frac{g}{2}-\rho\right)^{-1} & :\text{if } \rho\neq 0\\ -\left(s+\frac{g}{2}\right)^{-2} & :\text{if } \rho=0\end{cases}$$

$$-a(\check{\Phi},\check{\varphi})\cdot\left(s-\frac{g}{2}-\rho\right)^{-1}-b(\check{\Phi},\check{\varphi})\times\begin{cases}\left(s-\frac{g}{2}+\rho\right)^{-1} & :\text{if } \rho\neq 0\\ \left(s-\frac{g}{2}\right)^{-2} & :\text{if } \rho=0\end{cases}$$

は，s の entire function である。ここで

$$a(\Phi,\varphi)=\sum_{e}a(\Phi,e)\cdot\varphi(e),\quad b(\Phi,\varphi)=\sum_{e}b(\Phi,e)\cdot\varphi(e)$$

とおく（$\sum_{e}$ は，$\tilde{G}_{0,\mathbb{Q}}\backslash\tilde{G}_{0,f}/\tilde{U}_f$ の完全代表系上の和）。

Remark　φ として，$\tilde{G}_{0,f}$ における $\tilde{G}_{0,\mathbb{Q}}\tilde{U}_f$ の characteristic function を取ると，Theorem 1 は，Dirichlet series

$$\sum_{0\neq u\in\mathbb{Q}^g}c_u(\Phi,1)\cdot\left(\frac{1}{2}\,{}^tu\cdot S_0\cdot u\right)^{-\frac{s}{2}}\qquad(\mathrm{Re}\,s\gg 0)$$

の解析接続，関数等式，及び，possible poles を与える。上の Dirichlet series は Maass [2] により考察された。

§4. Rankin-Selberg method.

6. この § を通じて，$S_0 = \begin{pmatrix} S_0' & 0 \\ 0 & S_0'' \end{pmatrix}\begin{matrix} \}m \\ \}g-m \end{matrix}$ $(0<m<g)$ と仮定し，更に $\mathbb{Z}$-lattice $L_0' \subset \mathbb{Q}^m$, $L_0'' \subset \mathbb{Q}^{g-m}$ があって，

$$L_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^g \;\middle|\; x \in L_0',\ y \in L_0'' \right\}$$

となる (i.e. L_0 は orthogonal splitting $L_0 = L_0' \oplus L_0''$ をもつ) と仮定する。$S' = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & S_0' & \\ 1 & & \end{pmatrix}$ に対して，§1 と同様に，代数群 G', P', N', A', M' を定義する。G' は，写像

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & i & j \end{pmatrix}\begin{matrix} \}1 \\ \}m \\ \}1 \end{matrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & b & 0 & c \\ d & e & 0 & f \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ h & i & 0 & j \end{pmatrix}\begin{matrix} \}1 \\ \}m \\ \}g-m \\ \}1 \end{matrix}$$

により，G の部分代数群と同一視する。

$$L' = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{m+2} \;\middle|\; x, z \in \mathbb{Z},\ y \in L_0' \right\}$$

として，L' に対して，§1 と同様に G_A' の compact subgroup K' を定義する。上の同一視により $K' \hookrightarrow K$ となる。

7. L' が S' に関して maximal integral $\mathbb{Z}$-lattice であることから，$G_A' = P_A' \cdot K'$ となるから，$s \in \mathbb{C}$ と $g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix} \cdot k \in G_A'$ $(k \in K')$ に対して，

$$\theta(g, s) = |a|_A^{\,s}$$

とおく。$M_{\mathbb{Q}}' \cdot A_A' \cdot N_A' \backslash G_A' / K'$ 上の複素数値連続関数 φ を取る ($M_{\mathbb{Q}}' \cdot A_A' \cdot N_A' \backslash G_A' / K'$ 上の連続関数は，$\varphi \longmapsto \varphi|_{M_A'}$ により，$M_{\mathbb{Q}}' \backslash M_A' / (M_A' \cap K')$

上の連続関数と1対1に対応する)。G' の parabolic subgroup P' と φ に附随する Eisenstein series は,

$$E(\varphi;s,g)=\sum_{\gamma\in P'_{\mathbb{Q}}\backslash G'_{\mathbb{Q}}}\varphi(\gamma\cdot g)\cdot\theta(\gamma g,\ s+\tfrac{m}{2})\qquad(s\in\mathbb{C},\ g\in G'_{\mathbb{A}})$$

により定義される。$E(\varphi;s,g)$ は $\mathrm{Re}\,s>\frac{m}{2}$ で絶対収束し,全 s-平面に解析接続されて,s に関して関数等式を満す (c.f. Arthur [1])。

特に $m=1$ のときは,$M'=\{\pm1\}$ で,$E(1;s,g)$ の関数等式は,

$$E(1;s,g)=\mathrm{vol}(\mathbb{R}/L_0)^{-1}\cdot\sqrt{2/S_0^{!}}\cdot\frac{Z(2s)}{Z(2s+1)}\cdot E(1;-s,g)$$

となる。ここで $Z(s)=\pi^{-\frac{s}{2}}\cdot\Gamma(\frac{s}{2})\cdot\zeta(s)$ である.

8. 連続関数 $\varphi: M'_{\mathbb{Q}}A'_{\mathbb{A}}\cdot N'_{\mathbb{A}}\backslash G'_{\mathbb{A}}/K'\to\mathbb{C}$ と Maass form $\Phi\in A(w,\rho)$, 及び $0\neq u\in\mathbb{Q}^{\ell-m}$ に対して,

$$C_{u,\varphi}(\Phi)=\sum_{h}C_{\binom{0}{u}}(\Phi,h)\cdot\varphi(h)$$

とおく。ここで,$\sum_{h}$ は $M'_{\mathbb{Q}}\backslash M'_f/(M'_f\cap K')$ の完全代表系上の和である (M'_f は $M'_{\mathbb{A}}$ の finite part, 又 $M'_{\mathbb{Q}}\backslash M'_f/(M'_f\cap K')$ は有限集合である)。

このとき,次の定理が成り立つ.

<u>Theorem 2.</u> 連続関数 $\varphi: M'_{\mathbb{Q}}A'_{\mathbb{A}}\cdot N'_{\mathbb{A}}\backslash G'_{\mathbb{A}}/K'\to\mathbb{C}$ と cuspidal Maass form $\Phi\in S(w,\rho)$ に対して,次の Rankin-Selberg type の等式を得る;

$$\int_{G'_{\mathbb{Q}}\backslash G'_{\mathbb{A}}} \Phi(g)\cdot E(\varphi; s-\tfrac{m}{2}, g)\, dg \qquad (\mathrm{Re}\, s \gg 0)$$

$$= 2^{\frac{g}{2}-1}\cdot(2\pi)^{-s}\cdot\Gamma(\tfrac{1}{2}(s+\tfrac{g}{2}+\rho))\cdot\Gamma(\tfrac{1}{2}(s+\tfrac{g}{2}-\rho))\times\sum_{0\neq u\in\mathbb{Q}^{g-m}} C_{u,\varphi}(\Phi)\cdot(\tfrac{1}{2}\cdot{}^t u\cdot S_0''\cdot u)^{-\frac{s}{2}}\text{。}$$

特に, Dirichlet series $\sum_{0\neq u\in\mathbb{Q}^{g-m}} C_{u,\varphi}(\Phi)\cdot(\frac{1}{2}\cdot{}^t u\cdot S_0''\cdot u)^{-\frac{s}{2}}$ は全 s −平面に有理形に解析接続される。

連続関数 $\varphi: M'_{\mathbb{Q}}\cdot A'_{\mathbb{A}}\cdot N'_{\mathbb{A}}\backslash G'_{\mathbb{A}}/K' \to \mathbb{C}$ として, $\varphi|_{M'_f}$ が $M'_{\mathbb{Q}}\cdot(M'_f\cap K')$ の characteristic function となるものを取れば, Theorem 2 から, 次の corollary を得る。

Corollary 1. 任意の cuspidal mass form $\Phi\in S(w,\rho)$ に対して, Dirichlet series $\sum_{0\neq u\in\mathbb{Q}^{g-m}} C_{\binom{0}{u}}(\Phi,1)\cdot(\frac{1}{2}\cdot{}^t u\cdot S_0''\cdot u)^{-\frac{s}{2}}$ $(\mathrm{Re}\, s\gg 0)$ は, 全 s −平面に, 有理形に解析接続される。

$m=1$ のときには, $E(1; s, g)$ の関数等式と Theorem 2 から, 次の corollary を得る.

Corollary 2. $m=1$ とする。 cuspidal mass form $\Phi\in S(w,\rho)$ に対して,

$$\tilde{Z}(s,\Phi) = 2^{-s}\cdot\pi^{-2s}\cdot\Gamma(\tfrac{1}{2}(s+\tfrac{g}{2}+\rho))\cdot\Gamma(\tfrac{1}{2}(s+\tfrac{g}{2}-\rho))\times$$

$$\times\,\zeta(2s)\cdot\sum_{0\neq u\in\mathbb{Q}^{g-1}} C_{\binom{0}{u}}(\Phi,1)\cdot(\tfrac{1}{2}{}^t u\cdot S_0''\cdot u)^{-\frac{s}{2}} \qquad (\mathrm{Re}\, s\gg 0)$$

は，全 s-平面に有理形に解析接続され，関数等式

$$\tilde{Z}(1-s,\Phi)=vol(\mathbb{R}/L_0')\cdot\sqrt{S_0'/2}\cdot\tilde{Z}(s,\Phi)$$

を満す。

§5. $g=2$ の場合.

9. 虚2次体 $F=\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ ($m\in\mathbb{Z}$: square-free) を取り，その整数環を O_F とする。$F/\mathbb{Q}$ の norm を $N_{F/\mathbb{Q}}$ と書くと，$(F, N_{F/\mathbb{Q}})$ は，quadratic space over $\mathbb{Q}$ で正定値であって，O_F は $N_{F/\mathbb{Q}}$ に関して，maximal integral $\mathbb{Z}$-lattice となる。F の $\mathbb{Q}$-base $\{1,\sqrt{m}\}$ に対して，2次形式 $N_{F/\mathbb{Q}}$ は行列表現 $\begin{pmatrix}2&0\\0&-2m\end{pmatrix}$ をもつ。$\{1,\sqrt{m}\}$ により $F=\mathbb{Q}^2$ として，$S_0=\begin{pmatrix}2&0\\0&-2m\end{pmatrix}$，$L_0=O_F\hookrightarrow\mathbb{Q}^2$ とおく。$V=\{X\in Mat(2,F)\mid {}^tX=\bar{X}\}$ とおくと，$(V,-det)$ は quadratic space over $\mathbb{Q}$ で，符号数は $(1,3)$ である。V の $\mathbb{Q}$-base

$$\left\{e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ e_3=\begin{pmatrix}0&\sqrt{m}\\-\sqrt{m}&0\end{pmatrix},\ e_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\}$$

に関して，2次形式 $-det$ は行列表現 $S=\begin{pmatrix}&&1\\&S_0&\\1&&\end{pmatrix}$ をもつ。$\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ により $V=\mathbb{Q}^4$ とすると，$L=V\cap Mat(2,O_F)$ は，

$$L=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{Q}^4\ \middle|\ x,z\in\mathbb{Z},\ y\in L_0\right\}$$

となる。$(V,-det)$ の similitude のついた直交群

$$GO_{\mathbb{Q}}(V,-det)=\{\varphi\in GL_{\mathbb{Q}}(V)\mid det\circ\varphi=\nu(\varphi)\cdot det\ \text{ for }\nu(\varphi)\in\mathbb{Q}^\times\}$$

を $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ に関して行列表現すると，$GO_{\mathbb{Q}}(V, -\det) = \tilde{G}_{\mathbb{Q}}$ となる。$\mathcal{G}$ を $\mathbb{Q}$ 上定義された代数群で，$\mathbb{Q}$-rational points は $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}} = GL(2, F)$ なるものとする。$\pi : \mathcal{G} \to \tilde{G}$ を $\mathbb{Q}$ 上定義された準同型写像で，

$$\pi_{\mathbb{Q}}(g)\cdot X = g\cdot X\cdot {}^{t}\bar{g} \quad \text{for } g \in \mathcal{G}_{\mathbb{Q}},\ X \in V$$

なるものとする。π は，adelization $\pi_A : \mathcal{G}_A \to \tilde{G}_A$ に延長される。

$$F^{\times} \ni x + y\sqrt{m} \overset{\sim}{\longmapsto} \begin{pmatrix} x & my \\ y & x \end{pmatrix} \in \tilde{G}_{0,\mathbb{Q}} \qquad (x, y \in \mathbb{Q})$$

なる $\mathbb{Q}$ 上の同型に注意する。

10. Maass form $\Phi \in A(w, \rho)$ に対して，$\tilde{\Phi} = \Phi \circ \pi_A$ は automorphic form on $GL(2)$ over F となり（c.f. Weil [4]），Fourier 展開

$$\tilde{\Phi}\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \tilde{\Phi}_0\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{t \in F^{\times}} C(\tilde{\Phi}, t\cdot \operatorname{div} y)\cdot W\begin{pmatrix} t\cdot y_\infty & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (y \in F_A^{\times})$$

をもつ。ここで $\operatorname{div} y$ は $y \in F_A^{\times}$ に対応する F の ideal，y_∞ は $y \in F_A^{\times}$ の infinite part，又 W は $GL(2, \mathbb{C})$ 上の複素数値実解析的関数で

$$W\begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{y} \end{pmatrix} = K_\rho(4\pi\cdot y)\cdot(4\pi\cdot y) \qquad (0 < y \in \mathbb{R})$$

なるものである（K_ρ は modified Bessel 関数）。更に

$$C(\tilde{\Phi}, \operatorname{div} y) = C_{\binom{1}{0}}\left(\Phi, \pi_f\begin{pmatrix} y_f & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \qquad (y \in F_A^{\times})$$

となる。ここで，y_f（resp. π_f）は $y \in F_A^{\times}$（resp. π_A）の finite part である。このとき，

$$\int_{F_A^\times/F^\times} (\tilde{\Phi}-\tilde{\Phi}_0)\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot |y|_A^s \, d^\times y$$

$$= (2\pi)^{1-2s-\sigma}\cdot \Gamma\left(s+\frac{\sigma}{2}+\frac{1+\rho}{2}\right)\cdot \Gamma\left(s+\frac{\sigma}{2}+\frac{1-\rho}{2}\right) \times \sum_{\mathfrak{a}\subset F} c(\tilde{\Phi},\mathfrak{a})\cdot N(\mathfrak{a})^{-s}$$

（$N(\mathfrak{a})$ は，F の ideal $\mathfrak{a}$ の絶対 norm）は，$\tilde{\Phi}$ に附随した standard L-function である。一方

$$\int_{F_A^\times/F^\times} (\tilde{\Phi}-\tilde{\Phi}_0)\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot |y|_A^s \, d^\times y = \int_{F_A^\times} \Phi_{\binom{1}{0}}\left(\pi_A\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\cdot |y|_A^s \, d^\times y$$

$$= \frac{2\pi}{|U_F|}\cdot Z(2s+\sigma\,;\,\Phi,1) \qquad (U_F : F \text{の単数群})$$

である。よって，$Z(2s+\sigma\,;\,\Phi,1)$ は $\tilde{\Phi}$ の standard L-function に対応する。

11.　$m\equiv 2,3 \pmod 4$ とすると，$L_0=\mathbb{Z}\oplus\sqrt{m}\,\mathbb{Z}$ なる orthogonal splitting を生ずるので，$L_0'=\sqrt{m}\cdot\mathbb{Z}$，$L_0''=\mathbb{Z}$ として，§4 の議論を適用する。

$$\sum_{0<u\in\mathbb{Q}} c_{\binom{u}{0}}(\Phi,1)\cdot u^{-s} = \sum_{0<t\in\mathbb{Q}} c(\tilde{\Phi},(t))\cdot t^{-s}$$

となるが（$(t)=t\cdot\mathcal{O}_F$ は，F の principal ideal），

$$\int_{\mathbb{Q}_A^\times} \Phi_{\binom{1}{0}}\begin{pmatrix} y & & \\ & 1 & \\ & & y^{-1} \end{pmatrix}\cdot |y|_A^s \, d^\times y$$

$$= (2\pi)^{-s}\cdot \Gamma\left(\tfrac{1}{2}(s+1+\rho)\right)\cdot \Gamma\left(\tfrac{1}{2}(s+1-\rho)\right) \times \sum_{0<u\in\mathbb{Q}} c_{\binom{u}{0}}(\Phi,1)\cdot u^{-s}$$

であるから、Φが全ての Hecke operator の eigen function であれば、Dirichlet series $\sum_{0<u\in\mathbb{Q}} c_{\binom{u}{0}}(\Phi, 1)\cdot u^{-s}$ は Euler 積をもち (c.f. Sugano [3, §3])、それは、Langlands の意味で、Φに附随する standard L-function となる。よって、

$$\sum_{0<t\in\mathbb{Q}} c(\tilde{\Phi}, (t))\cdot t^{-s}$$

は、Φの standard L-function に対応する。

References.

[1] Arthur,J.: Eisenstein series and the trace formula. Proc.Sympos.Pure Math. vol 33. Part I, Amer.Math.Soc. Providence R.I. (1979) 253-274.

[2] Maass,H.: Automorphe Funktionen von mehreren Veranderlichen und Dirichletsche Reihen. Abh.Math.Sem.Univ. Hamburg 16 (1949) 72-100.

[3] Sugano,T.: On Dirichlet series attached to holomorphic cusp forms on SO(2,q). (to appear)

[4] Weil,A.: Dirichlet series and automorphic forms. Lecture Notes in Math. 189. (1971) Springer-Verlag.